

# KALKULUS I

Edisi Pertama

Penulis

**YUAN ANISA, S.Si.,M.Si**  
**MUHAMMAD HAFIZ, S.Pd.,M.Si**

Diterbitkan oleh:

**Universitas Medan Area Press**

# KALKULUS 1)

Penulis : Yuan Anisa, S.Si.,M.Si  
Muhammad Hafiz, S.Pd.,M.Si  
Desain Cover : Yuan Anisa, S.Si.,M.Si  
Edit Layout : Muhammad Hafiz, S.Pd.M.Si  
Editor : Nanda Novita, S.Kom.,M.Kom

## ISBN:

Copyright@2025  
Uk. UNESCO 15,5 cm x 23 cm hlm. 404

Diterbitkan oleh:

## Universitas Medan Area Press

Address: Jalan Kolam Nomor 1, Kenangan Baru, Kec. Percut  
Sei Tuan, Deliserdang, Sumatera Utara  
Telephone:061-7366878,  
e-mail: [pghc@uma.ac.id](mailto:pghc@uma.ac.id)

## **UNDANG-UNDANG NOMOR 28 TAHUN 2014 TENTANG HAK CIPTA**

1. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta yang meliputi penerjemahan dan pengadaptasian Ciptaan untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama **3 (tiga) tahun** dan/atau pidana denda paling banyak **Rp 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)**
2. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta yang meliputi penerbitan, penggandaan dalam segala bentuknya, dan pendistribusian Ciptaan untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama **4 (empat) tahun** dan/atau pidana denda paling banyak **Rp 1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah)**
3. Setiap orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada poin kedua di atas yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama **10 (sepuluh) tahun** dan/atau pidana denda paling banyak **Rp 4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah)**

# SINOPSIS

---

Topik yang dibahas dalam buku ajar ini yaitu **sistem bilangan riil, pertidaksamaan dan nilai mutlak** merupakan fondasi esensial dalam memahami kalkulus. Sistem bilangan riil memberikan kerangka matematis tempat semua operasi kalkulus berlangsung. Pertidaksamaan diperlukan untuk menentukan domain fungsi, interval konvergensi, dan analisis keterbatasan. Nilai mutlak berperan penting dalam definisi limit, kontinuitas, dan banyak teknik analisis matematis lainnya.

Topik selanjutnya **fungsi dan grafiknya** salah satu fondasi terpenting dalam matematika modern yang menjadi prasyarat untuk memahami kalkulus diferensial, kalkulus integral, aljabar linear, dan berbagai cabang matematika lainnya.

Topik selanjutnya **persamaan garis lurus, gradient dan lingkaran** merupakan fondasi penting dalam matematika yang menghubungkan konsep aljabar dengan geometri bidang datar, sekaligus menjadi jembatan menuju pemahaman kalkulus yang lebih lanjut.

Topik selanjutnya, **Persamaan kuadrat** merupakan salah satu materi fundamental dalam kalkulus yang menjadi landasan untuk topik-topik lebih lanjut seperti turunan, integral, dan optimasi.

Topik selanjutnya **Fungsi trigonometri** merupakan salah satu topik fundamental dalam matematika yang memiliki aplikasi luas di berbagai bidang ilmu, mulai dari fisika, teknik, hingga ilmu komputer.

Topik selanjutnya **Fungsi eksponensial dan fungsi logaritma** merupakan dua fungsi yang sangat penting dalam matematika dan banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, kimia, biologi, ekonomi, dan teknik.

Topik selanjutnya **Limit** merupakan konsep fundamental yang menjadi landasan bagi hampir seluruh topik dalam kalkulus, termasuk turunan, integral, dan analisis fungsi.

Topik selanjutnya **Turunan** yang merupakan konsep geometri turunan sebagai kemiringan garis singgung, interpretasi fisika sebagai kecepatan sesaat, hingga definisi formal menggunakan konsep limit.

# KATA PENGANTAR

---

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya penyusunan Buku Ajar Kalkulus. Buku ajar ini dirancang sebagai panduan belajar mandiri bagi mahasiswa yang mengambil mata kuliah Kalkulus I di perguruan tinggi.

Buku ini disusun sebagai bahan ajar Matematika tingkat perguruan tinggi, khususnya untuk mata kuliah Kalkulus dan Analisis Matematik. Materi yang disajikan pada buku ini membahas secara komprehensif konsep fungsi salah satu fondasi terpenting dalam matematika modern yang menjadi prasyarat untuk memahami kalkulus diferensial, kalkulus integral, aljabar linear, dan berbagai cabang matematika lainnya.

Kalkulus merupakan salah satu cabang matematika yang paling penting dan luas aplikasinya dalam ilmu sains, teknik, ekonomi, dan berbagai bidang lainnya. Pemahaman yang baik tentang konsep-konsep dasar kalkulus akan memberikan fondasi yang kokoh untuk mempelajari ilmu-ilmu lanjutan.

Penulisan buku ini mengacu pada standar penulisan buku teks perguruan tinggi internasional, dengan memuat: uraian teori yang sistematis dan rigorous, definisi-definisi formal, teorema beserta pembuktiannya, contoh-contoh yang representatif, serta soal latihan yang berjenjang dari tingkat pemahaman dasar hingga aplikasi lanjutan.

Penulis berharap buku ini dapat memberikan kontribusi nyata bagi pengembangan kemampuan berpikir analitis dan matematis mahasiswa. Kami menyadari buku ajar ini masih memerlukan penyempurnaan. Kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat kami harapkan.

Medan, 2026  
Tim Penulis

# DAFTAR ISI

---

Kata Pengantar | 5

Daftar Isi | 6

## **SISTEM BILANGAN RIIL, PERTIDAKSAMAAN DAN NILAI MUTLAK**

### **BAB I SISTEM BILANGAN RIIL**

- 1.1 Himpunan Bilangan | 17
- 1.2 Sistem Bilangan Riil | 18
- 1.3 Garis Bilangan Riil | 19
- 1.4 Sifat-sifat Bilangan Riil | 20
- 1.5 Interval pada Garis Bilangan Riil | 21
- 1.6 Supremum dan Infimum | 22

### **BAB II PERTIDAKSAMAAN**

- 2.1 Pengertian Pertidaksamaan | 28
- 2.2 Sifat-sifat Pertidaksamaan | 28
- 2.3 Pertidaksamaan Linear | 29
- 2.4 Pertidaksamaan Kuadrat | 31
- 2.5 Pertidaksamaan Pecahan | 32
- 2.6 Pertidaksamaan dengan Faktor | 33

### **BAB III NILAI MUTLAK**

- 3.1 Definisi Nilai Mutlak | 38
- 3.2 Sifat-sifat Nilai Mutlak | 38
- 3.3 Persamaan Nilai Mutlak | 39
- 3.4 Pertidaksamaan Nilai Mutlak | 40
- 3.5 Nilai Mutlak pada Garis Bilangan | 42

## **Daftar Pustaka**

## **FUNGSI DAN GRAFIK**

### **BAB I FUNGSI DAN GRAFIKNYA**

- 1.1 Definisi Fungsi | 50
- 1.2 Jenis-Jenis Fungsi | 54
- 1.3 Operasi Fungsi | 57

## Daftar Pustaka

### PERSAMAAN GARIS LURUS

#### BAB I PERSAMAAN GARIS LURUS

- 1.1 Sistem Koordinat Kartesius | **66**
- 1.2 Jarak antara Dua Titik | **66**
- 1.3 Titik Tengah Ruas Garis | **68**
- 1.4 Bentuk-bentuk Persamaan Garis Lurus | **69**
- 1.5 Kedudukan Dua Garis Lurus | **71**
- 1.6 Jarak Titik ke Garis | **72**

#### BAB II GRADIEN

- 2.1 Pengertian Gradien | **77**
- 2.2 Gradien dari Dua Titik | **78**
- 2.3 Gradien dan Sudut Kemiringan | **78**
- 2.4 Hubungan Gradien Dua Garis | **80**
- 2.5 Gradien sebagai Turunan | **81**

#### BAB III LINGKARAN

- 3.1 Pengertian dan Persamaan Standar Lingkaran | **85**
- 3.2 Persamaan Umum Lingkaran | **86**
- 3.3 Posisi Titik terhadap Lingkaran | **88**
- 3.4 Persamaan Garis Singgung Lingkaran | **89**
- 3.5 Posisi Garis terhadap Lingkaran | **92**
- 3.6 Posisi Dua Lingkaran | **93**

## Daftar Pustaka

### FUNGSI KUADRAT

#### BAB I PENDAHULUAN DAN KONSEP DASAR

- 1.1 Pengertian Fungsi Kuadrat | **102**
- 1.2 Bentuk Umum Persamaan Kuadrat | **102**
- 1.3 Koefisien dan Pengaruhnya | **103**

#### BAB II CARA MENGGAMBAR GRAFIK PERSAMAAN KUADRAT

- 2.1 Langkah-langkah Menggambar Grafik | **104**
- 2.2 Menentukan Titik Puncak (Vertex) | **105**
- 2.3 Menentukan Sumbu Simetri | **105**

2.4 Menentukan Titik Potong dengan Sumbu | 106

### **BAB III DISKRIMINAN DAN JENIS GRAFIK**

3.1 Pengertian Diskriminan | 107

3.2 Kasus  $D > 0, D = 0, \text{ dan } D < 0$  | 107

3.3 Hubungan Diskriminan dengan Grafik | 108

#### **Daftar Pustaka**

### **FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA**

#### **BAB I FUNGSI EKSPONENSIAL**

1.1 Pengertian Fungsi Eksponensial | 118

1.2 Grafik Fungsi Eksponensial | 119

1.3 Sifat-sifat Fungsi Eksponensial | 119

1.4 Bilangan  $e$  (Euler) | 120

1.5 Fungsi Eksponensial Alami | 120

#### **BAB II FUNGSI LOGARITMA**

2.1 Pengertian Fungsi Logaritma | 125

2.2 Grafik Fungsi Logaritma | 125

2.3 Sifat-sifat Fungsi Logaritma | 126

2.4 Logaritma Natural ( $\ln$ ) | 127

2.5 Persamaan Eksponensial dan Logaritma | 127

#### **BAB III KALKULUS FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA**

3.1 Turunan Fungsi Eksponensial | 132

3.2 Turunan Fungsi Logaritma | 133

3.3 Integral Fungsi Eksponensial | 134

3.4 Integral Fungsi Logaritma | 136

#### **Daftar Pustaka**

### **FUNGSI TRIGONOMETRI**

#### **BAB I SUDUT DAN PENGUKURAN SUDUT**

1.1 Pengertian Sudut | 142

1.2 Satuan Derajat dan Radian | 142

1.3 Konversi Derajat – Radian | 143

1.4 Panjang Busur dan Luas Juring | 143

## **BAB II DEFINISI DAN NILAI FUNGSI TRIGONOMETRI**

- 2.1 Definisi Berbasis Segitiga Siku-siku | **146**
- 2.2 Definisi Berbasis Lingkaran Satuan | **146**
- 2.3 Tabel Nilai Fungsi Trigonometri | **147**
- 2.4 Tanda Fungsi di Setiap Kuadran | **147**

## **BAB III IDENTITAS TRIGONOMETRI**

- 3.1 Identitas Dasar (Pythagorean) | **151**
- 3.2 Identitas Kebalikan dan Perbandingan | **151**
- 3.3 Identitas Sudut Komplementer & Suplemen | **151**
- 3.4 Pembuktian Identitas | **152**

## **BAB IV RUMUS JUMLAH, SELISIH, DAN SUDUT GANDA**

- 4.1 Rumus Jumlah dan Selisih Sudut | **155**
- 4.2 Rumus Sudut Ganda | **155**
- 4.3 Rumus Setengah Sudut | **155**
- 4.4 Rumus Perkalian ke Penjumlahan | **156**

## **BAB V GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI**

- 5.1 Grafik  $\sin x$  dan  $\cos x$  | **160**
- 5.2 Grafik  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$  | **160**
- 5.3 Transformasi Grafik | **161**

## **BAB VI FUNGSI INVERS TRIGONOMETRI**

- 6.1 Definisi dan Domain | **164**
- 6.2 Identitas Fungsi Invers | **166**

## **BAB VII PERSAMAAN TRIGONOMETRI**

- 7.1 Persamaan Dasar | **169**
- 7.2 Metode Penyelesaian | **169**

## **BAB VIII APLIKASI FUNGSI TRIGONOMETRI**

- 8.1 Hukum Sinus | **173**
- 8.2 Hukum Kosinus | **173**
- 8.3 Luas Segitiga | **174**
- 8.4 Aplikasi Fisika dan Teknik | **174**

## **Daftar pustaka**

## LIMIT

### BAB 1 DEFINISI LIMIT

- 1.1 Pengertian Intuitif Limit | 187
- 1.2 Definisi Informal Limit | 187
- 1.3 Definisi Formal (*Epsilon-Delta*) | 188
- 1.4 Cara Menghitung Limit | 188

### BAB II LIMIT SEPIHAK

- 2.1 Definisi Limit Sepihak | 191
- 2.2 Hubungan Limit Sepihak dan Limit | 191

### BAB III TEOREMA LIMIT

- 3.1 Teorema-teorema Dasar Limit | 194
- 3.2 Teorema Limit Fungsi Trigonometri | 195
- 3.3 Teorema Apit | 195

### BAB IV KEKONTINUAN FUNGSI

- 4.1 Definisi Kekontinuan | 197
- 4.2 Jenis-jenis Diskontinuitas | 197
- 4.3 Kekontinuan pada Selang | 198
- 4.4 Teorema Kekontinuan | 198
- 4.5 Teorema Nilai Antara | 198

### BAB V LIMIT DI TAK HINGGA DAN LIMIT TAK HINGGA

- 5.1 Limit di Tak Hingga | 200
- 5.2 Limit Penting di Tak Hingga | 200
- 5.3 Limit Fungsi Rasional di Tak Hingga | 200
- 5.4 Limit Tak Hingga | 201
- 5.5 Cara Menemukan Asimtot Vertikal | 201

## Daftar Pustaka

### KONSEP TURUNAN DAN APLIKASI

#### BAB I KONSEP TURUNAN & GARIS SINGGUNG

- 1.1 Pendahuluan dan Motivasi | 212
- 1.2 Gradien dan Kemiringan Kurva | 212
- 1.3 Garis Singgung Kurva | 213

#### BAB II KECEPATAN SESAAT

- 2.1 Gerak dan Kecepatan Rata-rata | 217

- 2.2 Kecepatan Sesaat sebagai Limit | 217
- 2.3 Percepatan Sesaat | 218

### **BAB III DEFINISI FORMAL TURUNAN**

- 3.1 Definisi Turunan dengan Limit | 221
- 3.2 Turunan Kiri dan Kanan | 221
- 3.3 Keberadaan Turunan (*Differentiability*) | 222
- 3.4 Hubungan Kekontinuan dan Kediferensialan | 222

### **BAB IV ATURAN PENCARIAN TURUNAN**

- 4.1 Aturan Turunan Dasar | 226
- 4.2 Aturan Perkalian (*Product Rule*) | 228
- 4.3 Aturan Pembagian (*Quotient Rule*) | 228
- 4.4 Aturan Rantai (*Chain Rule*) | 229
- 4.5 Turunan Fungsi Trigonometri | 229
- 4.6 Turunan Fungsi Eksponen & Logaritma | 230

### **Daftar Pustaka**

## **TURUNAN FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA**

### **BAB I PENDAHULUAN & BILANGAN E**

- 1.1 Motivasi: Mengapa Mempelajari Fungsi Eksponen & Logaritma? | 238
- 1.2 Bilangan Euler ( $e$ ) dan Asal-usulnya | 238
- 1.3 Fungsi Eksponen Alami  $f(x) = e^x$  | 240
- 1.4 Sifat-sifat Logaritma Alam | 240

### **BAB II TURUNAN FUNGSI EKSPONENSIAL**

- 2.1 Turunan  $f(x) = e^x$  dari Definisi Limit | 242
- 2.2 Turunan  $f(x) = e^{kx}$  dan  $e^{g(x)}$  | 243
- 2.3 Turunan Fungsi Eksponen Basis  $a$ :  $f(x) = a^x$  | 244
- 2.4 Turunan  $f(x) = a^{g(x)}$  | 245

### **BAB III TURUNAN FUNGSI LOGARITMA**

- 3.1 Turunan  $f(x) = \ln(x)$  dari Definisi Limit | 249
- 3.2 Turunan  $f(x) = \ln(g(x))$  – *Chain Rule* | 250
- 3.3 Turunan  $f(x) = \ln|x|$  | 251
- 3.4 Turunan Fungsi Logaritma Basis  $a$ :  $\log_a(x)$  | 251

## **BAB IV TEKNIK DIFERENSIASI LOGARITMIK**

- 4.1 Konsep Diferensiasi Logaritmik | **257**
- 4.2 Turunan Fungsi Bentuk  $f(x)^{g(x)}$  | **258**
- 4.3 Turunan Fungsi Hasil Perkalian/Pembagian Banyak | **258**

## **BAB V APLIKASI TURUNAN EKSPONEN & LOGARITMA**

- 5.1 Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponensial | **262**
- 5.2 Nilai Maksimum/Minimum Fungsi Eksponen-Log | **263**

## **Daftar Pustaka**

### **TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI**

#### **BAB I PENDAHULUAN DAN PRASYARAT**

- 1.1 Fungsi Trigonometri Dasar | **272**
- 1.2 Identitas Trigonometri Penting | **273**
- 1.3 Limit Trigonometri Fundamental | **273**

#### **BAB II KONSEP DASAR TURUNAN**

- 2.1 Definisi Turunan | **275**
- 2.2 Aturan-Aturan Turunan | **275**

#### **BAB III TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI DASAR**

- 3.1 Turunan  $\sin x$  dan  $\cos x$  | **277**
- 3.2 Turunan  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$  | **278**
- 3.3 Tabel Ringkasan Rumus | **279**

#### **BAB IV TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI KOMPOSIT**

- 4.1 Aturan Rantai pada Fungsi Trigonometri | **280**
- 4.2 Contoh Soal dan Pembahasan | **280**

#### **BAB V TURUNAN TINGKAT TINGGI DAN FUNGSI INVERS**

- 5.1 Turunan Tingkat Tinggi | **283**
- 5.2 Turunan Fungsi Trigonometri Invers | **284**

## **Daftar Pustaka**

## **TURUNAN FUNGSI IMPLISIT**

### **BAB I PENDAHULUAN**

- 1.1 Latar Belakang dan Motivasi | **292**
- 1.2 Tujuan Pembelajaran | **293**
- 1.3 Prasyarat Materi | **293**

### **BAB II KONSEP FUNGSI IMPLISIT**

- 2.1 Fungsi Eksplisit vs Fungsi Implisit | **294**
- 2.2 Definisi Formal Fungsi Implisit | **295**
- 2.3 Kapan Menggunakan Diferensiasi Implisit? | **295**

### **BAB III METODE DIFERENSIASI IMPLISIT**

- 3.1 Prosedur Diferensiasi Implisit | **297**
- 3.2 Teorema Fungsi Implisit | **297**
- 3.3 Diferensiasi Kedua Fungsi Implisit | **297**

### **BAB IV APLIKASI DIFERENSIASI IMPLISIT**

- 4.1 Garis Singgung dan Garis Normal | **310**
- 4.2 Laju yang Berkaitan (Related Rates) | **310**
- 4.3 Aplikasi pada Kurva-Kurva Khusus | **311**

## **Daftar Pustaka**

## **ANALISIS FUNGSI: MAKSIMUM DAN MINIMUM**

### **BAB I NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM**

- 1.1 Pengertian Nilai Ekstrem Lokal dan Global | **322**
- 1.2 Teorema Nilai Ekstrem (*Extreme Value Theorem*) | **323**
- 1.3 Titik Kritis dan Uji Turunan Pertama | **324**
- 1.4 Uji Turunan Kedua | **326**
- 1.5 Masalah Optimisasi | **327**

### **BAB II KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN**

- 2.1 Fungsi Naik dan Turun | **330**
- 2.2 Uji Kemonotonan | **330**
- 2.3 Kecekungan (*Concavity*) dan Titik Balik | **332**
- 2.4 Uji Kecekungan Kedua | **333**

## **BAB III PENGGAMBARAN GRAFIK CANGGIH**

- 3.1 Asimtot Horizontal dan Vertikal | **335**
- 3.2 Asimtot Miring (*Oblique*) | **336**
- 3.3 Panduan Lengkap Penggambaran Grafik | **337**
- 3.4 Contoh Penggambaran Grafik Canggih | **338**

## **BAB IV TEOREMA NILAI RATA-RATA**

- 4.1 Teorema Rolle | **341**
- 4.2 Teorema Nilai Rata-rata Lagrange | **342**
- 4.3 Teorema Nilai Rata-rata Cauchy | **344**
- 4.4 Aturan L'Hopital | **344**
- 4.5 Aplikasi Teorema Nilai Rata-rata | **345**

### **Daftar Pustaka**

## **TURUNAN DAN LAJU YANG BERKAITAN**

### **BAB I KONSEP DASAR TURUNAN**

- 1.1 Definisi Turunan | **359**
- 1.2 Interpretasi Geometris | **359**
- 1.3 Notasi Turunan | **360**

### **BAB II ATURAN-ATURAN TURUNAN**

- 2.1 Aturan Dasar | **361**
- 2.2 Aturan Rantai (*Chain Rule*) | **362**
- 2.3 Turunan Implisit | **363**

### **BAB III LAJU YANG BERKAITAN (*RELATED RATES*)**

- 3.1 Konsep Laju yang Berkaitan | **365**
- 3.2 Langkah-Langkah Penyelesaian | **365**
- 3.3 Aplikasi Laju yang Berkaitan | **366**

### **Daftar Pustaka**

## **DIFERENSIAL DAN APROKSIMASI**

### **BAB I PENDAHULUAN DAN KONSEP DASAR TURUNAN**

- 1.1 Pengertian Turunan | **380**
- 1.2 Notasi Turunan | **381**
- 1.3 Aturan-aturan Turunan | **382**

## **BAB II DIFERENSIAL**

- 2.1 Pengertian Diferensial | **384**
- 2.2 Diferensial Total | **385**
- 2.3 Sifat-sifat Diferensial | **386**

## **BAB III APROKSIMASI LINEAR DAN LINEARISASI**

- 3.1 Aproksimasi Linear | **387**
- 3.2 Linearisasi Fungsi | **389**
- 3.3 Estimasi Kesalahan | **389**

## **BAB IV DERET TAYLOR DAN APROKSIMASI POLINOMIAL**

- 4.1 Deret Taylor | **391**
- 4.2 Deret Maclaurin | **392**
- 4.3 Sisa (*Remainder*) Deret Taylor | **393**

## **BAB V APLIKASI DIFERENSIAL DAN APROKSIMASI**

- 5.1 Propagasi Kesalahan | **394**
- 5.2 Metode Newton-Raphson | **395**
- 5.3 Aproksimasi dalam Fisika dan Teknik | **396**

## **Daftar Pustaka**